ABSZOLÚTÉRTÉKES KIFEJEZÉSEKET TARTALMAZÓ EGYENLETEK I.
(OKTATÓ PPT)

Készítette: Antal Klára
matematika
szaktanácsadó

Református
Pedagógiai
Intézet

Definíció:

Legyen *a* tetszőleges algebrai kifejezés, *a* abszolútértéke:

$$|a| = \begin{cases} +a, ha\ a \geq 0 \\ -a, ha\ a < 0 \end{cases}$$

Szavakban kifejezve:

Egy kifejezés abszolútértéke egyenlő:

– magával a kifejezéssel, ha a kifejezés pozitív vagy 0;

– az ellentettjével, ha a kifejezés negatív.

Pl.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, ha\ x-2 \geq 0\ azaz\ x \geq 2 \\ -(x-2), ha\ x-2 < 0\ azaz\ x < 2 \end{cases}$$

Vagyis felbontva a zárójelet:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, ha\ x-2 \geq 0\ azaz\ x \geq 2 \\ -x+2, ha\ x-2 < 0\ azaz\ x < 2 \end{cases}$$

1. FELADAT

Melyik számot jelölheti az x, ha | 3 x + 2 | = 8?

Algebrai megoldás:

Két olyan szám van, amelynek az abszolút értéke 8:

a 8 és a (–8).

Ezért két esetben kell a feladatot megoldani.

<u>Első eset:</u> 3 x + 2 = 8

3 x = 6, vagyis $x_1 = 2$,

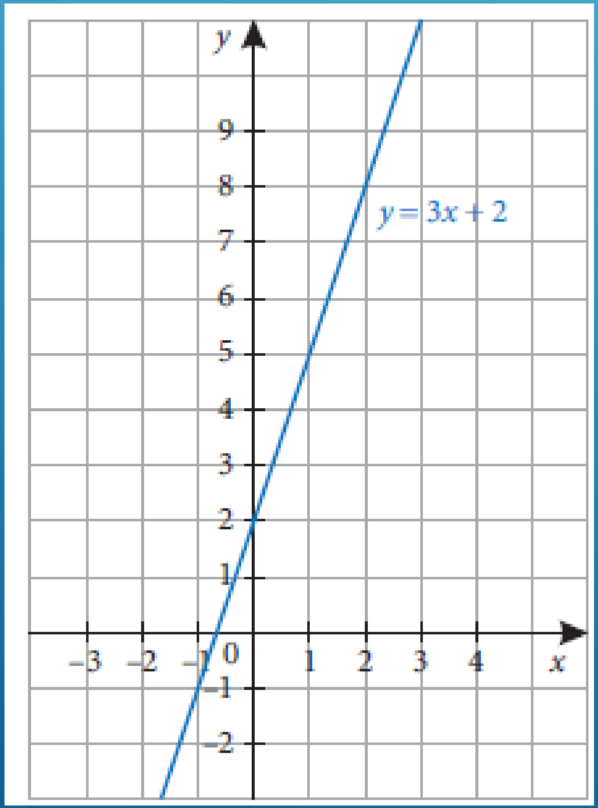
<u>Második eset:</u> 3 x + 2 = –8.

3 x = –10, vagyis $x_2 = -\frac{10}{3}$

Grafikus megoldás:

Rajzoljuk meg az x →|3 x + 2| függvény grafikonját, és olvassuk le, melyik számhoz rendeli ez a függvény a 8 értéket!

Először az x →3 x + 2 elsőfokú függvényt ábrázoljuk:



Ezután a grafikonnak az x tengely alatti részét az x tengelyre tükrözzük.

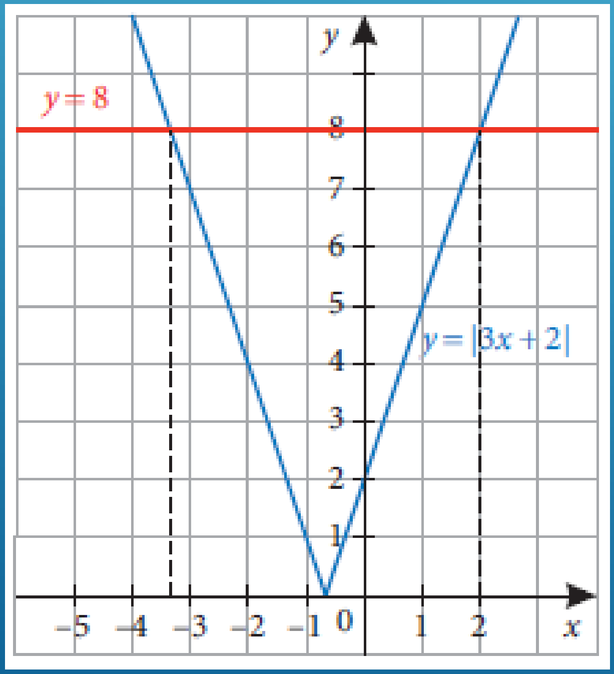
Így kapjuk az $x \to |3x + 2|$ függvény grafikonját. Ez a kék, V betűhöz hasonlító ponthalmaz.

Ugyanitt megrajzoljuk az $x \to 8$ függvény grafikonját, a piros egyenest.

A két grafikon metszéspontjainak első koordinátái adják meg az

$|3x + 2| = 8$ egyenlet gyökeit.

Az ábráról közelítőleg leolvashatjuk a 2 és a $-\frac{10}{3} = -3\frac{1}{3}$ gyököket.



Ellenőrzés:

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, megkaptuk-e az egyenlet gyökeit.

Ha x = 2, akkor | 3 x + 2 | = | 6 + 2 | = 8, tehát a 2 gyöke az adott egyenletnek.

Ha x = - $\frac{10}{3}$, akkor | 3 x + 2 | = | –10 + 2 | = 8, tehát a - $\frac{10}{3}$ is gyöke az adott egyenletnek.

A grafikon jól mutatja, hogy az x más számot nem jelölhet.

2. FELADAT

Oldjuk meg a negatív számok halmazán a következő egyenletet!

$$|x+2|-3x=4$$

Grafikus megoldás

$$|x+2|=3x+4$$

Ábrázoljuk az $f(x)=|x+2|$ és $g(x)=3x+4$ függvényeket ugyanabban a koordinátarendszerben!

https://tananyag.mdoe.hu/mod/book/view.php?id=45&chapterid=1558

Algebrai megoldás:

$$|x+2|=\begin{cases} x+2, ha\ x+2\geq 0\ azaz\ x\geq -2 \\ -(x+2), ha\ x+2<0\ azaz\ x<-2 \end{cases}$$

Vagyis felbontva a zárójelet:

$$|x+2|=\begin{cases} x+2, ha\ x+2\geq 0\ azaz\ x\geq -2 \\ -x-2, ha\ x+2<0\ azaz\ x<-2 \end{cases}$$

1. eset: Ha $x \geq -2$, akkor a szám abszolútértéke önmaga, azaz elhagyhatjuk az abszolútérték jelet:

$x + 2 - 3x = 4$ /öv

$-2x + 2 = 4$ /-2

$-2x = 2$ /:(-1)

$x = -1$

Ez a feltételben meghatározott tartományba esik, így az eredeti egyenletnek is gyöke.

VAGY

2. eset: Ha $x < -2$, az abszolútérték jelen belül álló kifejezés negatív, akkor a szám abszolútértéke a szám ellentettje:

$-x - 2 - 3x = 4$ /öv

$-4x - 2 = 4$ / +2

$-4x = 6$ /: (-4)

$x = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

Ez az érték nem felel meg az $x < -2$ feltételnek, így az eredeti egyenletnek sem lesz gyöke.

Ellenőrzés:

$$|-1+2|-3\cdot(-1)=4$$

$$1+3=4$$

Megoldáshalmaz: $I=\{-1\}$

Önálló feladatok:

1. Oldjuk meg a pozitív számok halmazán a következő egyenletet!
$x+|x-5|=7$

2. Melyik valós számok esetén teljesül, hogy $|2x-8|=3x-7$

3. Oldd meg a valós számok halmazán!
$|2x-6|=3$

1. FELADAT

$$x + |x - 5| = 7$$

Megoldás:

$$|x-5| = \begin{cases} x-5, ha & x \geq 5 \\ -x+5 ha & x \prec 5 \end{cases}$$

I. eset Feltétel: $x \geq 5$

Ha az abszolútérték jelen belül álló kifejezés nem negatív, akkor a szám abszolútértéke önmaga, azaz elhagyhatjuk az abszolútérték jelet:

$$x + x - 5 = 7$$
$$2x - 5 = 7$$
$$2x = 12$$
$$x = 6$$

Ez a feltételben meghatározott tartományba esik, így az eredeti egyenletnek is gyöke.

VAGY

II. eset Feltétel: $x \prec 5$

Ha az abszolútérték jelen belül álló kifejezés negatív, akkor a szám abszolútértéke a szám ellentettje:

$$x - x + 5 = 7$$

$$5 = 7$$

Ellentmondást kaptunk, így az eredeti egyenletnek sem lesz gyöke.

Ellenőrzés: $6 + |6 - 5| = 7$

$$6 + 1 = 7$$

Megoldáshalmaz: $M = \{6\}$

2. FELADAT

Melyik valós számok esetén teljesül, hogy $|2x - 8| = 3x - 7$?

Algebrai megoldás:

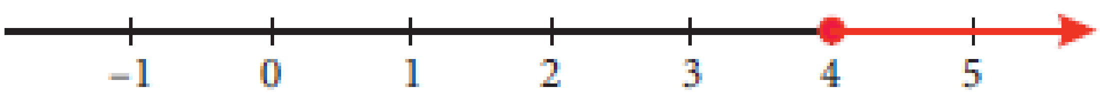
Egy kifejezés abszolút értéke egyenlő:
- magával a kifejezéssel, ha a kifejezés pozitív vagy 0;
- az ellentettjével, ha a kifejezés negatív.

Ez alapján bontsuk a feladatot két esetre!

1. eset: $2x - 8 \geq 0$

Ez akkor teljesül, ha $2x \geq 8$, azaz:

ha $x \geq 4$



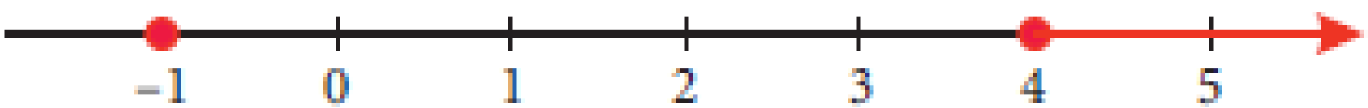
Vagyis az első esetben csak 4-nél nagyobb vagy egyenlő számok között keressük a megoldást.

Ekkor $|2x-8| = 2x-8$, hiszen $2x-8$ nem negatív.
Ezért az egyenlet ilyen alakra írható:

$2x - 8 = 3x - 7$

Ezt mérlegelvvel megoldva: $x = -1$.

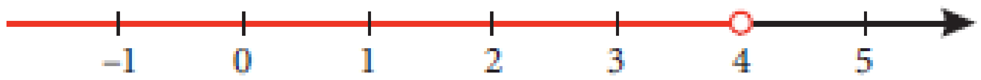
Össze kell vetni, hogy ez a megoldás eleme-e annak az intervallumnak, amelyben ebben az esetben a megoldást kerestük. -1 nem nagyobb vagy egyenlő, mint 4, ezért az abszolút értékes egyenletnek a -1 NEM megoldása.



2. eset: $2x - 8 < 0$

Ez akkor teljesül, ha $2x < 8$, azaz:

ha $x < 4$



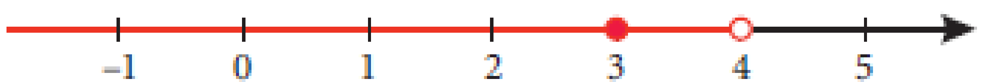
A második esetben tehát csak 4-nél kisebb számok között keressük a megoldást.

Ekkor $|2x - 8| = -2x + 8$, hiszen $2x - 8$ negatív. Ezért az egyenlet ilyen alakra írható:

$-2x + 8 = 3x - 7$

Mérlegelvvel megoldva: $5x = 15$, azaz $x = 3$.

Össze kell vetni, hogy ez a megoldás eleme-e annak az intervallumnak, amelyben ebben az esetben a megoldást kerestük. 3 kisebb, mint 4, ezért $x = 3$ megoldása az egyenletnek.



Behelyettesítéssel ellenőrizve:

$|2 \cdot 3 - 8| = |-2| = 2$ és $3 \cdot 3 - 2 = 2$.

3. FELADAT

Oldd meg a valós számok halmazán! $|2x - 6| = 3$

Megoldás:

1. eset $2x - 6 = +3 \rightarrow 2x = 9 \rightarrow x_1 = 4{,}5$
2. eset $2x - 6 = -3 \rightarrow 2x = 3 \rightarrow x_2 = 1{,}5$

Behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy a kapott gyökök valóban megoldások.

Érettségi feladatok 1. feladat

Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$|x-2| = 7$ **(2 pont)**

1. eset $x-2=7 \ \rightarrow x=9$
2. eset $x-2=-7 \rightarrow x=-5$

Megoldás:

Az egyenlet megoldása a **9** (1 pont)

és a **−5**. (1 pont)

Összesen: 2 pont

2. FELADAT

Adott a valós számok halmazán értelmezett $f(x)=|x-4|$ függvény. Mely x értékek esetén lesz $f(x)=6$? **(2 pont)**

Vagyis az $|x-4|=6$ egyenletet kell megoldani.

Hasonlóan az előző feladat mintájára:

1. eset $x-4=6 \to x_2=10$
2. eset $x-4=-6 \to x_1=-2$

Megoldás:

$x_1=-2$, $x_2=10$ (2 pont)

3. FELADAT

Az x-nél 2-vel nagyobb számnak az abszolút értéke 6. Adja meg x lehetséges értékeit! (2 pont)

***<u>Megoldás</u>*:**

A feladat szövege alapján az alábbi egyenlet írható fel: $|x+2|=6$.

Az egyenlet megoldásánál két esetet különböztetünk meg.

I. $x+2=6 \Rightarrow \boldsymbol{x_1=4}$ (1 pont)

II. $x+2=-6 \Rightarrow \boldsymbol{x_2=-8}$ (1 pont)

Összesen: 2 pont

4. FELADAT

Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$|x-3| = 3x-1$. **(7 pont)**

Az egyenlet alakja $x \geq 3$ esetén: $x-3=3x-1$, (1 pont)
amiből $x=-1$, (1 pont)
ami nem megoldása az eredeti egyenletnek. (1 pont)

Az egyenlet alakja $x<3$ esetén: $-(x-3)=3x-1$, (1 pont)
amiből $\boldsymbol{x=1}$. (2 pont)
Ellenőrzés behelyettesítéssel vagy ekvivalenciára hivatkozva. (1 pont)

EMELT SZINTŰ ANYAG

Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$|x+2|+|x-3|=17$$

Megoldás:

$$|x+2|=\begin{cases} x+2, ha\ x+2\geq 0 \rightarrow x\geq -2 \\ -x-2, ha\ x+2<0 \rightarrow x<-2 \end{cases}$$

$$|x-3|=\begin{cases} x-3, ha\ x-3\geq 0 \rightarrow x\geq 3 \\ -x+3, ha\ x-3<0 \rightarrow x<3 \end{cases}$$

Két abszolútérték a számegyenesen 3 intervallumot határoz meg, ennek megfelelően három esetet kell vizsgálnunk:

$1.\ ha\ x\geq 3;$ $2.\ ha\ -2\leq x<3;$ $3.\ ha\ x<-2.$

1. Ha $x \geq 3$, akkor mindkét abszolút értékben nemnegatív számok állnak, így elhagyva az abszolútértékjeleket, az egyenletet így írhatjuk:

$x + 2 + x - 3 = 17$ azaz $2x = 18$, ahonnan $x = 9$

Ez valóban nagyobb, mint 3.

2. Ha $-2 \leq x < 3$, akkor az első abszolút értékben nemnegatív, a másodikban negatív szám szerepel, így ekkor a következő egyenletet kapjuk:

$x + 2 - x + 3 = 17\ azaz\ 5 = 17, ami\ ellentmondás$.

3. Ha $x < -2$, akkor mindkét abszolút értékben negatív számok állnak, ekkor tehát azt kapjuk, hogy

$-x - 2 - x + 3 = 17, azaz\ -2x = 16, ahonnan\ x = -8$

Ez valóban kisebb, mint -2.

Ezek szerint az eredeti egyenletnek két megoldása van: $x_1 = 9$, $x_2 = -8$, melyek helyességéről egyszerű helyettesítéssel könnyen meggyőződhetünk.

Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$|x+1|+|x-3|=8$$

SZORGALMI FELADAT

Vége